大學入學考試中心
九十四學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 6 題，填充題第 A 至 I 題共 9 題

作答方式：• 用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液

• 答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

（一）填答選擇題時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到−，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\underset{\square}{3}$ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\underset{\square}{1}$ 與 $\underset{\square}{3}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

（二）填充題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的對數值與參考數值

第一部分：選擇題

壹、單選題

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 試問整數 43659 共有多少個不同的質因數？
(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 5 個

2. 利用公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$，可計算出 $(11)^3+(12)^3+\cdots+(20)^3$ 之值爲
(1) 41075　(2) 41095　(3) 41115　(4) 41135　(5) 41155

3. 台北銀行最早發行的樂透彩(俗稱小樂透)的玩法是「42 選 6」：購買者從 01~42 中任選六個號碼，當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同(不計次序)時即得頭獎；台北銀行曾考慮改發行「39 選 5」的小小樂透：購買者從 01~39 中任選五個號碼，如果這五個號碼與開出的五個號碼完全相同(不計次序)則得頭獎。假設原來的小樂透中頭獎的機率是 R，而曾考慮發行的小小樂透中頭獎的機率是 r。試問比值 $\frac{r}{R}$ 最接近下列哪個選項？
(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11

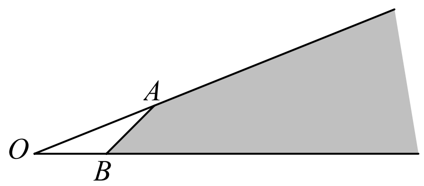
4. 設 a, b 爲正實數，已知 $\log_7 a=11, \log_7 b=13$；試問 $\log_7(a+b)$ 之值最接近下列哪個選項？
(1) 12　(2) 13　(3) 14　(4) 23　(5) 24

5. 某校高一第一次段考數學成績不太理想，多數同學成績偏低；考慮到可能是同學們適應不良所致，數學老師決定將每人的原始成績取平方根後再乘以 10 作爲正式紀錄的成績。今隨機抽選 100 位同學，發現調整後的成績其平均爲 65 分，標準差爲 15 分；試問這 100 位同學未調整前的成績之平均 M 介於哪兩個連續正整數之間？(第 7 頁附有標準差公式)
(1) $40\le M<41$　(2) $41\le M<42$　(3) $42\le M<43$　(4) $43\le M<44$　(5) $44\le M<45$

貳、多選題

說明：第 6 至 11 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分。

6. 如右圖所示，兩射線 OA 與 OB 交於 O 點，試問下列選項中哪些向量的終點會落在陰影區域內？

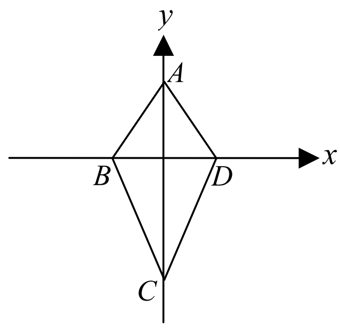


(1) $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$　(2) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(3) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　(4) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

(5) $\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

7. 如右圖所示，坐標平面上一鳶形 $ABCD$，其中 A,C 在 y-軸上，B,D 在 x-軸上，且 $\overline{AB}=\overline{AD}=2$，$\overline{BC}=\overline{CD}=4$，$\overline{AC}=5$。令 m_{AB}、m_{BC}、m_{CD}、m_{DA} 分別表直線 AB、BC、CD、DA 之斜率。試問以下哪些敘述成立？



(1) 此四數值中以 m_{AB} 為最大

(2) 此四數值中以 m_{BC} 為最小

(3) $m_{BC}=-m_{CD}$

(4) $m_{AB}\times m_{BC}=-1$

(5) $m_{CD}+m_{DA}>0$

8. 假設坐標空間中三相異平面 E_1、E_2、E_3 皆通過 $(-1,2,0)$ 與 $(3,0,2)$ 兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上？

(1) $(2,2,2)$　(2) $(1,1,1)$　(3) $(4,-2,2)$　(4) $(-2,4,0)$　(5) $(-5,-4,-2)$

9. 若 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，試問以下哪些選項恆成立？

(1) $\sin\theta<\cos\theta$　(2) $\tan\theta<\sin\theta$　(3) $\cos\theta<\tan\theta$

(4) $\sin 2\theta<\cos 2\theta$　(5) $\tan\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{1}{2}\tan\theta$

10. 設 F_1 與 F_2 爲坐標平面上雙曲線 $\Gamma:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P 爲 Γ 上一點，使得此三點構成一等腰三角形。試問以下哪些值可能是這些等腰三角形的週長？

(1) 20　(2) 24　(3) 28　(4) 32　(5) 36

11. 設 S 爲空間中一球面，$\overline{AB}$ 爲其一直徑，且 $\overline{AB}=10$。若 P 爲空間中一點，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}=14$， 則 P 點的位置可能落在哪裡？

(1) 線段 $\overline{AB}$ 上；
(2) 直線 AB 上，但不在線段 $\overline{AB}$ 上；
(3) 球面 S 上；
(4) 球 S 的內部，但不在線段 $\overline{AB}$ 上；
(5) 球 S 的外部，但不在直線 AB 上。

第 二 部 分 ： 填 充 題

說明：1.第 A 至 I 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (12–34)。
　　　2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$ ，則 $p=$ ⑫ , $q=$ ⑬ 。

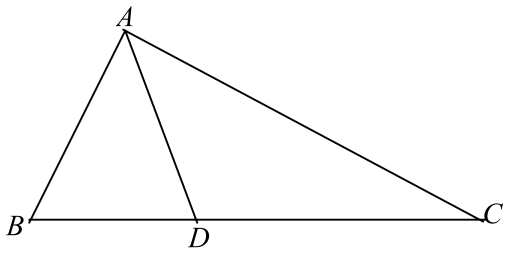
B. 在坐標平面上，正方形 $ABCD$ 的四個頂點坐標分別為 $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$, $D(1,1)$。 設 P 為正方形 $ABCD$ 內部的一點，若 ΔPDA 與 ΔPBC 的面積比為 1：2, 且 ΔPAB 與 ΔPCD 的面積比為 2：3, 則 P 點的坐標為($\frac{⑭}{⑮}$, $\frac{⑯}{⑰}$)。(化成最簡分數)

C. 在數線上有一個運動物體從原點出發，在此數線上跳動，每次向正方向或負方向跳 1 個單位，跳動過程可重複經過任何一點。若經過 6 次跳動後運動物體落在點+4 處，則此運動物體共有 ⑱ 種不同的跳動方法。

D. 設複數 $z=1-i$ ；若 $1+z+z^2+\cdots+z^9=a+bi$, 其中 a, b 為實數， 則 $a=$ ⑲⑳ , $b=$ ㉑㉒ 。

E.　設 O 爲坐標平面上的原點，P 點坐標爲(2, 1)；若 A、B 分別是正 x-軸及正 y-軸上的點，使得 $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ ，則 ΔOAB 面積的最大可能值爲 $\dfrac{㉓㉔}{㉕㉖}$ 。(化成最簡分數)

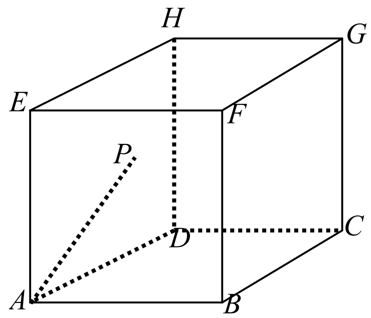
F.　如右圖所示，在 ΔABC 中，$\angle BAC$ 的平分線 AD 交對邊 $\overline{BC}$ 於 D； 已知 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=6$，且 $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，則 $\cos\angle BAD$ 之值爲 $\dfrac{㉗}{㉘}$ 。(化成最簡分數)



G.　在坐標平面上，過 $F(1,0)$ 的直線交拋物線 Γ ： $y^2=4x$ 於 P、Q 兩點，其中 P 在上半平面，且知 $2\overline{PF}=3\overline{QF}$ ，則 P 點的 x-坐標爲 $\dfrac{㉙}{㉚}$ 。(化成最簡分數)

H. 設 x 爲一正實數且滿足 $x\cdot 3^{x}=3^{18}$；若 x 落在連續正整數 k 與 $k+1$ 之間，則 $k=$ ㉛㉜ 。

I. 如右圖所示，$ABCD$-$EFGH$ 爲邊長等於 1 之正立方體。若 P 點在立方體之內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$, 則 P 點至直線 AB 之距離爲 $\frac{㉝}{㉞}$ 。(化成最簡分數)



參 考 公 式 及 可 能 用 到 的 數 值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上兩點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3. 通過 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $x_2\neq x_1$.

4. 等比數列 $\langle ar^{k-1}\rangle$ 的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$, $r\neq 1$.

5. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

6. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

7. 棣美弗定理: 設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，$n$ 為一正整數

8. 算術平均數：$M(=\overline{X})=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   (樣本)標準差：$S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}((\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2})-n\overline{X}^2)}$

9. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$；$\sqrt{3}\approx 1.732$；$\sqrt{5}\approx 2.236$；$\sqrt{6}\approx 2.449$；$\pi\approx 3.142$

10. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$, $\log_{10}3\approx 0.4771$, $\log_{10}5\approx 0.6990$, $\log_{10}7\approx 0.8451$