篇名

基礎微積分

作者

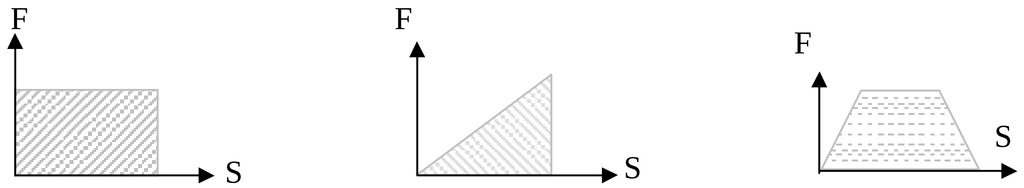
趙怡婷。私立曉明女中。二年丁班。37

基礎微積分

壹●前言

F－ t 圖下的面積爲衝量 $\vec{j}$ ，F－ S 圖下的面積爲所作之功 W。

例如

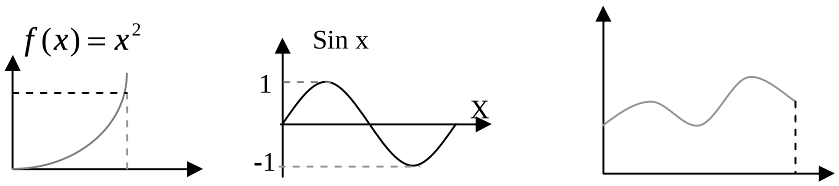


長方形面積＝長×寬

三角形面積＝(底×高)÷2

梯形面積＝(上底＋下底)×高÷2

其中就算如中圖、右圖，須求變力功，但其圖形仍爲規則的三角形、梯形，由小學學過的公式便可求得其面積。如果像下面的圖，F 爲 S 之二次函數、正（餘）弦函數……甚至是高次函數等的面積又該怎麼辦呢？這挑起了我的研究動機。



貳●正文

一、極限的概念

01. 定義

設 f(x)爲一函數，若 x 趨近定值 a 時，如果 f(x)會趨近一定數 A 時，稱 A 爲 f(x)在 x=a 之極限。以記號 $\lim_{x \to a} f(x) = A$ 表示。

02.極限的連續

A.連續函數

a. 若函數 f 滿足①f(a)有意義② $\lim_{x \to a} f(x)$ 存在③ $\lim_{x \to a} f(x)$ ＝f(a)，稱 f 在 x＝a 處連續。

b.　函數 f 在定義域中每一點均爲連續，則稱 f 爲連續函數。

亦即是：極限存在——左極限（$\lim_{x\to a^-} f(x)$）＝右極限（$\lim_{x\to a^+} f(x)$）

又當左極限（$\lim_{x\to a^-} f(x)$）＝右極限（$\lim_{x\to a^+} f(x)$）＝值帶入（f(a)）時稱爲連續。

二、導數

01. 何謂導數

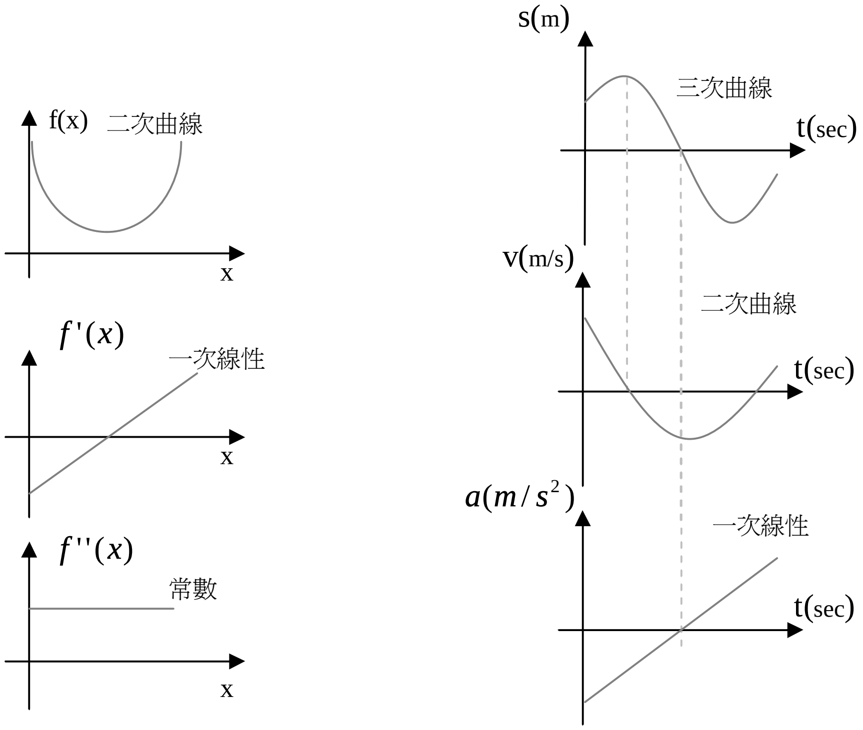
又稱前導數，可用來預測函數值的變化情形。
比如：速度是位移的導數，加速度是速度的導數。

02. 導數的定義

A.設 f(x)爲一函數，則 $f`(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 稱爲 f(x)在 x＝a 之導數，此時稱 f(x)在 x＝a 可微分，又對任何函數 f(x)，我們稱 f`(x)爲 f(x)之導函數。

B.導函數 $f`(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x}$

C.例如



三、基本微分

01. 冪函數的微分

A.設 n 爲正整數，則 $\frac{dx^n}{dx}$＝nx $^{n-1}$

B.若 c 爲一常數，則 $\frac{dc}{dx}=0$

C.若 n 爲正整數，則 $\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ （或 $\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ ）

由A 、B、C 可知，設 r∈ Q 則 $\frac{dx^r}{dx}$＝r x $^{r-1}$（事實上 r∈ R 均成立）。

02. 四則運算

A.若 f(x)與 g(x)是可微分的函數，則 f(x)+g(x)也是可微分的函數，而且

$\frac{d}{dx}$（f(x)+g(x)）＝$\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$

B.設 f(x) 是一個可微分的函數，而 c 是一個常數，則

$\frac{d}{dx}(cf(x))$＝c$\frac{df(x)}{dx}$

C. 若 f(x)與 g(x)是可微分的函數，則

$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{df(x)}{dx}-\frac{dg(x)}{dx}$

D. 若 f(x)與 g(x)是可微分的函數，則

$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))$＝f(x)($\frac{dg(x)}{dx}$)+（$\frac{df(x)}{dx})g(x)$

E. 若 f(x)與 g(x)是可微分的函數，則

$\frac{d}{dx}$（$\frac{f(x)}{g(x)}$）＝$\frac{g(x)\frac{df(x)}{dx}-f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{(g(x))^2}$

03. 合成函數的微分

若 f(x)與 g(y)都是可微分的函數，則合成函數 g。f 也是可微分的函數。而且

$\frac{d}{dx}$（(g。f）(x)）＝$\frac{dg(y)}{dy}$，y＝f(x)$\frac{df(x)}{dx}$，或寫成：(g。f）`(x)＝g`(f(x))

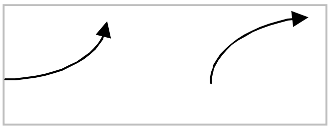
四、繪圖

01. 極值與增減

A.微分就是求圖形的瞬間變化率（$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$），所以當 x＞a 時

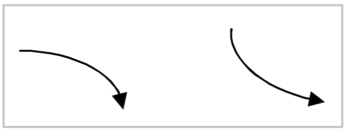
a.若 f(x)＞f(a)，即表原函數遞增，即 f`(x)＞０

比如：



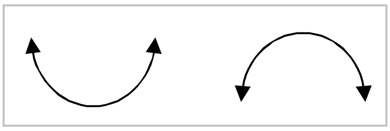
b.若 f(x)＜f(a)，即表原函數遞減，即 f`(x)＜０

比如：



c.若 f(x)＝f(a)，即 f`(x)＝０時，表 f(x)在 x＝a 時有極值

比如：



02. 極值可能發生處：

A. 滿足 f`(a)＝0 之點 a（峰點、谷點）
B. f(x)不可微分之點（尖點）
C. f(x)定義域之端點（端點）

03. 凹狀

A.凹口向上或凹口向下

對於可微分的函數 f(x)而言，假定動點 P 沿著 y＝f(x)的圖形向右移動，若在點（a,f(a)）附近，P 點的移動方向保持在做左轉彎，我們就說 f(x)在 x＝a 處開口向上；若在點（a,f(a)）附近， P 點的移動方向保持在做右轉彎，我們就說 f(x)在 x＝a 處開口向下。
由另一方面來說，即是：在這條曲線上相近的兩點連線，為一弦，若此弦在圖形之上方，則稱凹口向上（f(x)在此附近遞增）；若此弦在圖形之下方，則稱凹口向下（f(x)在此附近遞減）。

B.判斷凹口向上或凹口向下之方法

a. x＝a 時凹口向上⇔ P 沿曲線 y＝f(x)運動時在（a,f(a)）左轉彎⇔在(a,f(a))之切線斜率隨 a 之增加而增加⇔ f`(x)在 x＝a 附近爲增函數⇔ f``(a)＞0

b. x＝a 時凹口向下⇔ f``(a)＜0（理由同上）

C.反曲點（拐點）

a. 若在 a 的附近，x＜a 時 f(x)的凹向與 x＞a 時 f(x)的凹向相反，則(a,f(a))稱爲是函數 f(x)的一個反曲點或拐點。

b. F``(a)＝0，則在 x＝a 處爲反區點。

f(x)：反曲點⇒ f`(x)：極大/小點（水平切線，不一定爲極點）⇒ f``(x)：0

04. 漸近線

A.定義

假設Γ爲一曲線，而 L 爲一直線，若動點 P 沿著曲線Γ的任一方向趨向無窮遠時，Ｐ點至直線Ｌ的距離跟著趨近０（即：Γ向Ｌ趨近，但不會超過Ｌ），則稱直線Ｌ是曲線Γ的一條漸近線。

其中又可分爲鉛直漸近線、水平漸近線及斜漸近線。

B.定理

設 f(x)爲一函數，則直線 y＝ax+b 是曲線 y=f(x)之漸近線的充要條件是

a＝$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，b＝$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$ 或是 a＝$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，b＝$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-ax)$

pf：1.設 y＝ax+b 爲 y＝f(x)之漸近線

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{|f(x)-ax-b|}{\sqrt{a^2+1}}=0 \text{ 或} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)-ax-b|}{\sqrt{a^2+1}}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}|f(x)-ax-b|=0 \text{ 或} \lim_{x\to-\infty}|f(x)-ax-b|=0$$

2.因 x→±∞ ∴$|x|>1$

$$\Rightarrow 0\le\left|\frac{f(x)}{x}-a-\frac{x}{b}\right|\le|f(x)-ax-b|$$

$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{x}a-\frac{b}{x}\right|\le\lim_{x\to-\infty}|f(x)-ax-b|$$

(或 $x\to-\infty$)　　(或 $x\to\infty$)

但 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|f(x)-ax-b\right|=0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right|=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=0$$

(或 $x\to-\infty$)　　　　(或 $x\to-\infty$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{a}-a=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{a}=a$$

(或 $x\to-\infty$)　　　　(或 $x\to-\infty$)

3.又 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|f(x)-ax-b\right|=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax-b)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)=$b

05. 繪圖

A.極值可能發生處

a. 滿足 f`(a)＝0 之點 a（峰點、谷點）
b. f(x)不可微分之點（尖點）
c. f(x)定義域之端點

B.繪圖

a. 預測趨勢（$x\to\pm\infty$ ，$y\to$？）
b. 找漸近線
c. 求極值，了解遞增、遞減
d. 了解凹口向上或凹口向下及反曲點
e. 描點

六、基本積分

01. 基本圖形之面積

A.矩形面積＝長×寬
B.平行四邊形面積＝底×高
C.三角形面積＝$\frac{1}{2}$（底×高）
D.梯形面積$\frac{1}{2}$（上底＋下底）×高

E. $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，則 $\Delta ABC = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right\|$

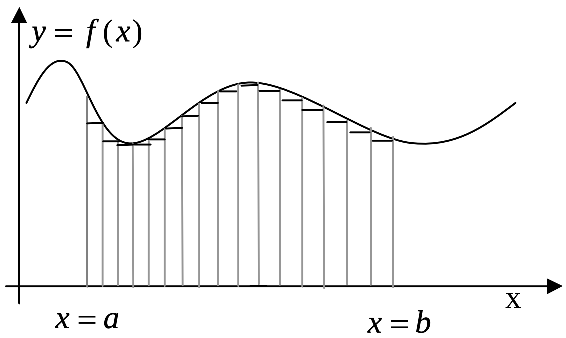
F. a $\Delta ABC = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

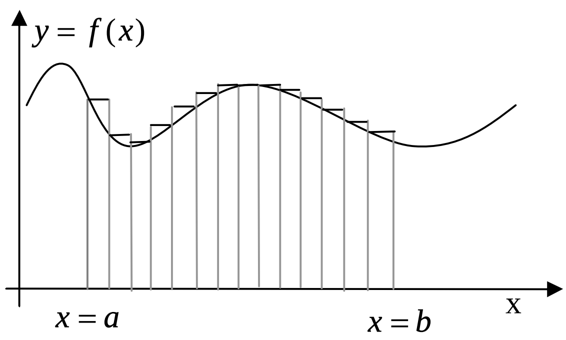
（其中 $\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$）

G. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，則 a $\Delta ABC = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

02. 曲線圍成面積：

邊界含多區線之面積求法：
使用「分割」及「逼近」求面積





①將(a,0)與(b,0)間之線段分成 n 個長條，每條寬 $\frac{b-a}{n}$。

②作它的下矩形與上矩形，設上矩形每個高依次為 $M_1\ M_2\cdots\cdots M_n$，上和以 U_n 表之，下矩形每個高依次為 $m_1\ m_2\cdots\cdots m_n$，下和以 L_n 表之。

【註】m_i 其實就是函數 f(x)在閉區間 $\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}, a+\frac{i(b-a)}{n}\right]$ 上的絕對極小值，M_i 是 f(x)在這個閉區間上的絕對極大值。

③由上求出 $L_n \le$ 區域 S 面積 $\le U_n$。

若 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n = a \Rightarrow$ S 面積 $= \lim\limits_{n\to\infty} L_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n = a$。

03. 無窮數列的極限

A. 設 $<a_n>$ 為一數列，當趨近於無限大時，若之值趨近於某一定值 a（實數或虛數皆

可)，則稱作數列＜ a_n ＞有 a 的極限，記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a$ ，當 $n\to\infty$ 。

B.收斂數列：若一個數列有極限，則我們稱之爲收斂數列。
發散數列：若一個數列無極限、則我們稱之爲發散數列。

C.設＜ a_n ＞與＜ b_n ＞均爲收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$， $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ 則

a.數列＜ $a_n + b_n$ ＞也是收斂數列，其極限爲 $a+b$ ，即

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

b.數列＜ $a_n - b_n$ ＞也是收斂數列，其極限爲 $a-b$ 即

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

c.若 c 是一常數，則數列＜c a_n ＞也是收斂數列，其極限爲 ca，即

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

d.數列＜ a_n b $_n$ ＞也是收斂數列，其極限爲 ab 即

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$$

e.若 b $\neq$ 0 則數列＜ $\dfrac{a_n}{b_n}$ ＞也是收斂數列，其極限爲 $\dfrac{a}{b}$ 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

D.設＜ a_n ＞與＜ b_n ＞均爲收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ， $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，若從某一項起，a $_n \geq b_n$ 都

成立，則 a $\geq b$ ，亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

六、定積分及反導函數

01.定積分定義

A.n 等分 $[a,b]$
B. $\forall i, i = 1,2,3,\ldots,n$
m $_i$ 及 M_i 分別爲 $\left[a+\dfrac{(i-1)(b-a)}{n}, a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right]$ 上之絕對極小值及絕對極大值。

令下和 $L_n = \dfrac{b-a}{n}\cdot(m_1+m_2+\ldots+m_n)$

令上和$U_n=\dfrac{b-a}{n}\cdot(M_1+M_2+...+M_n)$

C.計算$\lim\limits_{n\to\infty}L_n$及$\lim\limits_{n\to\infty}U_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}U_n$＝S，則稱 S 爲 $f(x)$在$[a,b]$上之定積分，以

$\int_a^b f(x)dx$表示，其中a,b分別稱爲定積分的上限與下限。

02.可積分

對每個函數$f(x)$，只要$[a,b]$在它的定義域內，都可以先將$[a,b]$ n 等分，再進一步考慮 $f(x)$的下和數列＜L_n＞及上和數列＜U_n＞，必須在$\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}U_n$的情況下，才把它們的共同極限，稱爲$f(x)$在$[a,b]$上的定積分，這種情形稱函數$f(x)$在$[a,b]$上可積分。

03.定積分的性質

A.加法：$\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\Rightarrow$分段積分

B.數積$\int_a^b c\cdot f(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$

C.面積

若 f(x)是定義在閉區間$[a,b]$上的函數，則

$\int_a^b f(x)dx=$[y＝f(x)的圖形、x＝a、x＝b 所圍成的區域中，x 軸上側面積減掉 x 軸下側面積]

D. 規定

a. $\int_a^a f(x)dx=0$

b. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

04. 反導函數

A.設 f(x)與 g(x)兩函數有 g`(x)＝f(x)之關係（f(x)是 g(x)之一導函數），稱 g(x)是 f(x)之一個反導函數或不定積分。

B.反導函數不唯一：

g(x)是 f(x)之反導函數，則 g(x)+c (c 爲任意常數)，亦爲 f(x)的反導函數，所以反導函數不唯一。

C.f(x)的反導函數(不定積分)，通常以$\int f(x)dx$表示；若 g(x)爲 f(x)的一個反導函數，則

$\int f(x)dx$=g(x)+c 爲常數

05.微積分基本定理

A.設 f(x)是定義於閉區間[a,b]上的一個函數，若在[a,b]上的每一點 c 都滿足

$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$（函數連續）而 g(x)是 f(x)的一個反導函數，則可得：

$\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$

B. $g(b)-g(a)$ 通常寫爲 $g(x)|_a^b$

∴若 g(x)是 f(x)之一反導函數則 $\int_a^b f(x)dx = g(x)|_a^b = g(b)-g(a)$

參●結論

簡單地說，微分就是求圖形斜率，積分就是求圖形面積。牛頓當年發明了一套微積分的定義及其運算方式（雖然現今用的符號多爲來布尼茲所創），而解決了許多數學上的問題。時至今日，微積分更是被推廣運用到許多層面：有理函數、無理函數、參數函數、三角函數到指數、對數、向量……，或者十八、九世紀數學發展的主流——微分方程如馬爾薩斯人口方程、虎克定律、牛頓萬有引力方程等，無庸置疑的，微積分在生活中確是扮演不容小覷的角色。

肆●引註資料

一、Hall A. R.著。陳雪美譯（民 86）。牛頓——思想的探索者。牛頓出版股份有限公司
二、徐清朗（民 84）。理科（上）之（1）。光朗出版社
三、徐清朗（民 84）。理科（上）之（2）。光朗出版社
四、逼近方法
http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_approximation/index.html
五、微積分早期歷史
http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_calculus_e_his/index.html
六、連續函數
http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_continuity/index.html
七、微分方程
http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_dif_equation/index.html
八、微積分基本定理
http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_ftc/index.html